連続系演習第5回

Runge-Kutta法と刻み幅制御

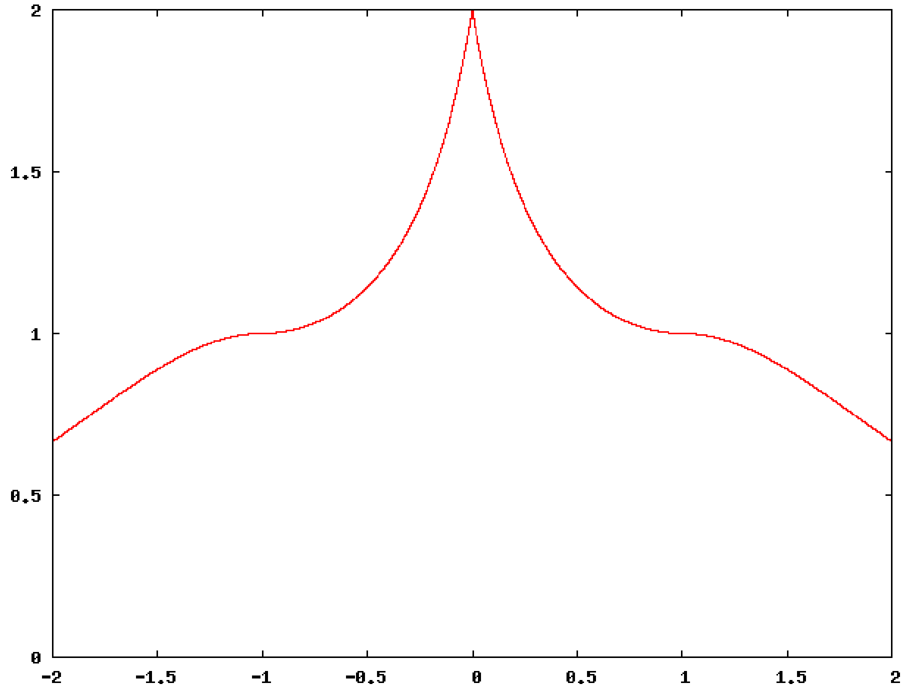
課題

- 微分方程式を解く

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{sign}(x)\,|1-|x||\,y^2,\ y(-2) = \frac{2}{3}$$

- 解析解

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x+1)^2+2} & -2 \le x \le -1 \\ \dfrac{-2}{(x+1)^2-2} & -1 \le x \le 0 \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2-2} & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{2}{(x-1)^2+2} & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



微分方程式の初期値問題

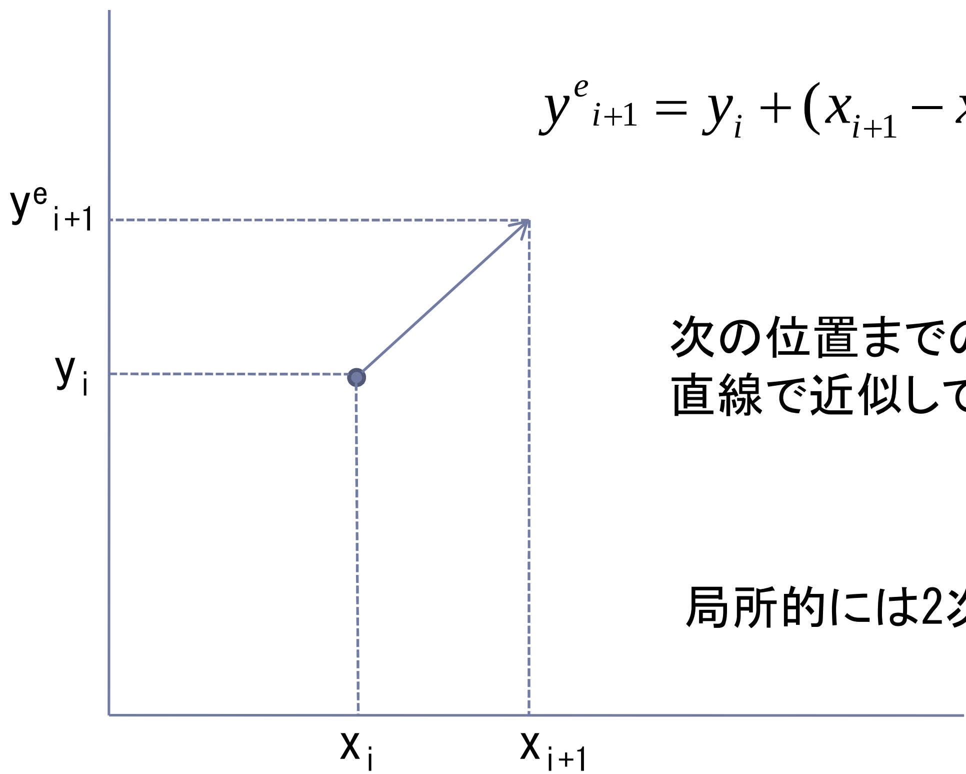
- 微分方程式初期値問題
  - dx/dt = f(x, t), x(0)=a
- いくつかの解法
  - Euler陽解法
    - 簡単
  - Euler陰解法
    - ちょっと面倒
  - 予測子修正法
    - 簡単で良い結果が出ることも多い
- これを解くときに、時間方向の誤差を減らしたい
  - 時間方向には非対称性がある
    - 過去についてはわからない
  - 解析的な精度を上げたい
    - しかし時間はなるべくかけたくない

Runge-Kutta法

- 次の値を決定するのに何回かやってみる
  - 予測子修正に似た手法
  - 計算量は数倍～数十倍になる（用いる公式による）

Euler陽解法(前進Euler法)

$$y^{e}{}_{i+1} = y_i + (x_{i+1} - x_i)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i, y=y_i}$$



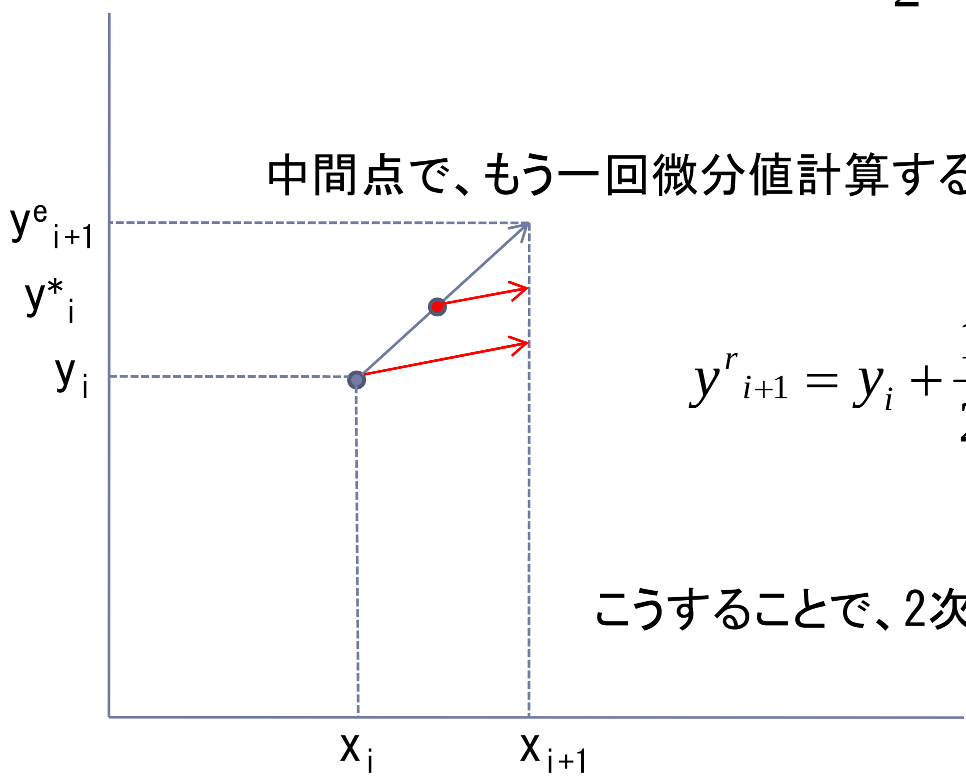
次の位置までの軌道を
直線で近似して予測する。

局所的には2次、全体として1次の公式

2次Runge-Kutta法

$$y^*_i = y_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_i,\,y=y_i}$$

中間点で、もう一回微分値計算する

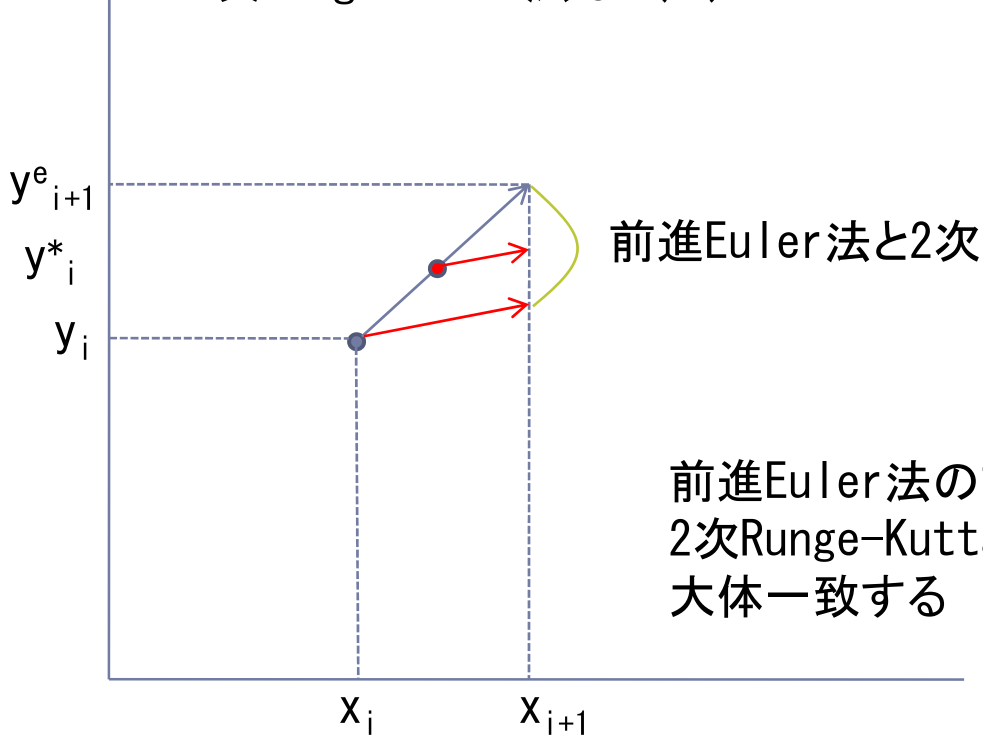


$$y^r_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{x_i + x_{i+1}}{2},\,y=y^*_i}$$

こうすることで、2次の精度が出る（局所的には3次）

誤差評価

$h = x_i+1 - x_i$
局所的に考えると、前進Euler法の誤差はO(h^2)
2次Runge-Kutta法はO(h^3)



前進Euler法と2次Runge-Kuttaの差

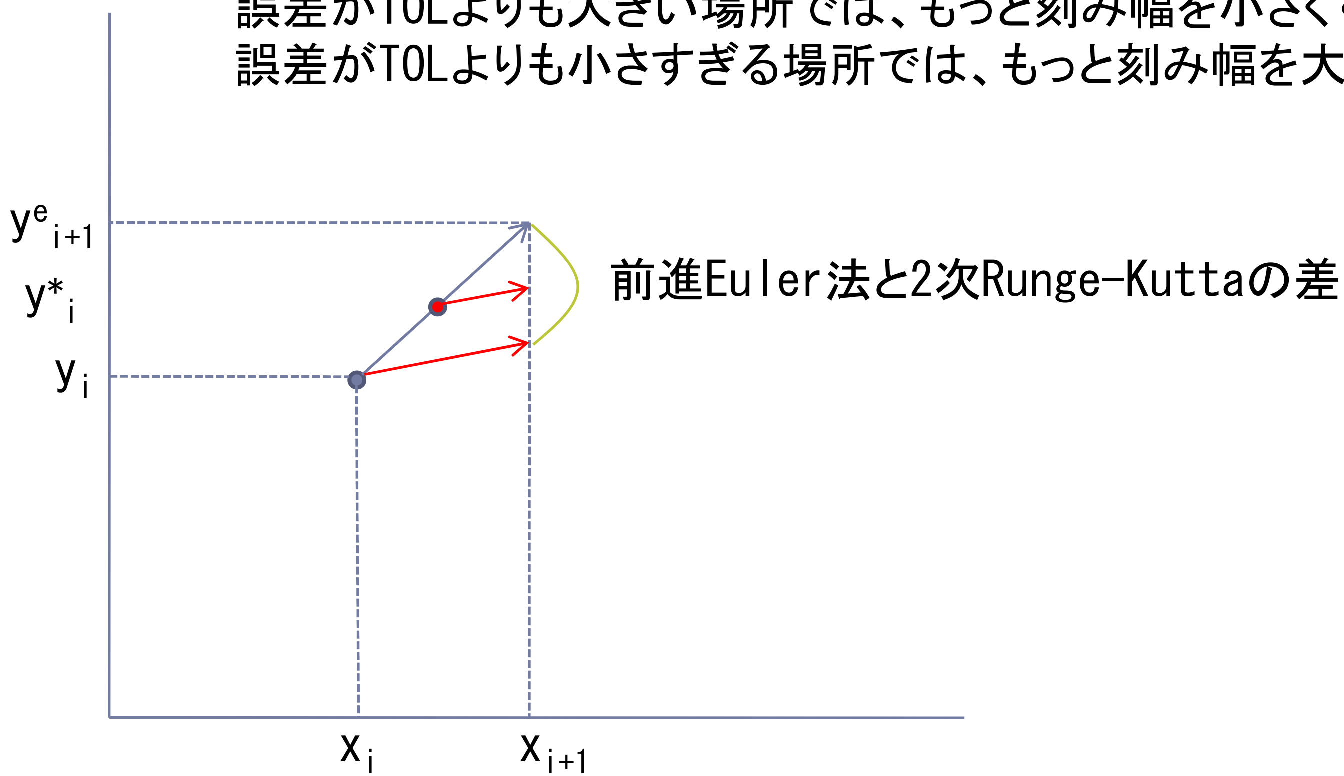
前進Euler法の誤差は、
2次Runge-Kuttaと前進Eulerの差と
大体一致する

刻み幅制御

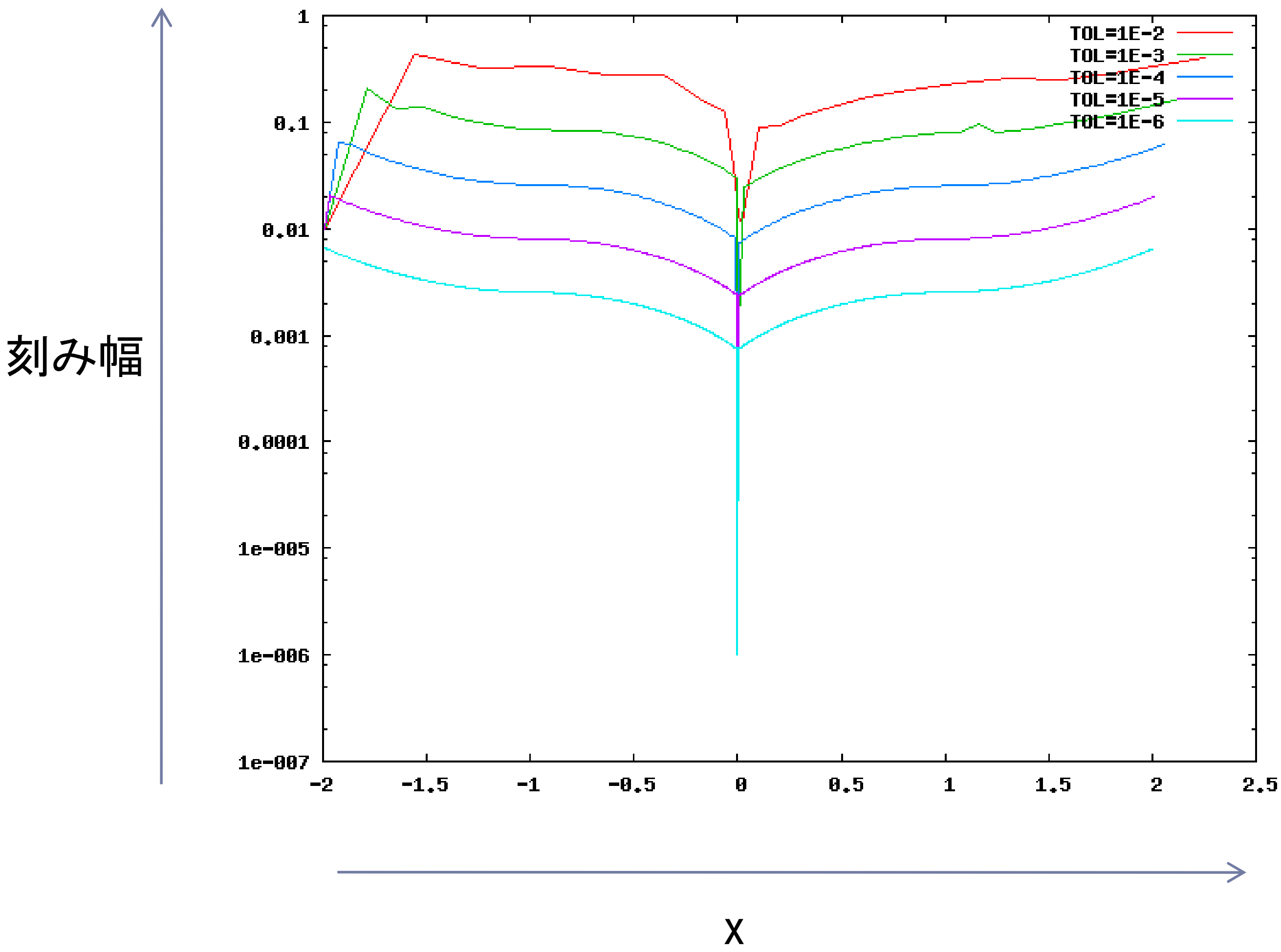
- 誤差の大きいところでは細かく、誤差の小さいところでは大きく刻み幅を取りたい
  - 大きいところの誤差が全体に影響
  - 誤差が小さいところは計算量節約＋丸め誤差回避
- 前進Euler法やRunge-Kuttaでは解析的な誤差オーダーがわかっているのだから、それを基に計算を行えば良い

手法

あるしきい値TOLを決めておく(TOLは比較的小さい値)
誤差がTOLよりも大きい場所では、もっと刻み幅を小さくする
誤差がTOLよりも小さすぎる場所では、もっと刻み幅を大きくする



実験結果(各点の刻み幅)



刻み幅
1
0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-005
1e-006
1e-007
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
TOL=1E-2
TOL=1E-3
TOL=1E-4
TOL=1E-5
TOL=1E-6
x

課題

- 用いるものは埋め込み式Runge-Kuttaを用いる
  - 今日の授業配布のプリントにある
  - 一応次のページにも書いておいた
  - Merson(1957)の公式 or Fehlberg(1969)の公式
- 誤差を評価し、刻み幅を調節しながら解くこと
- 各点における刻み幅や計算量などを考察すること

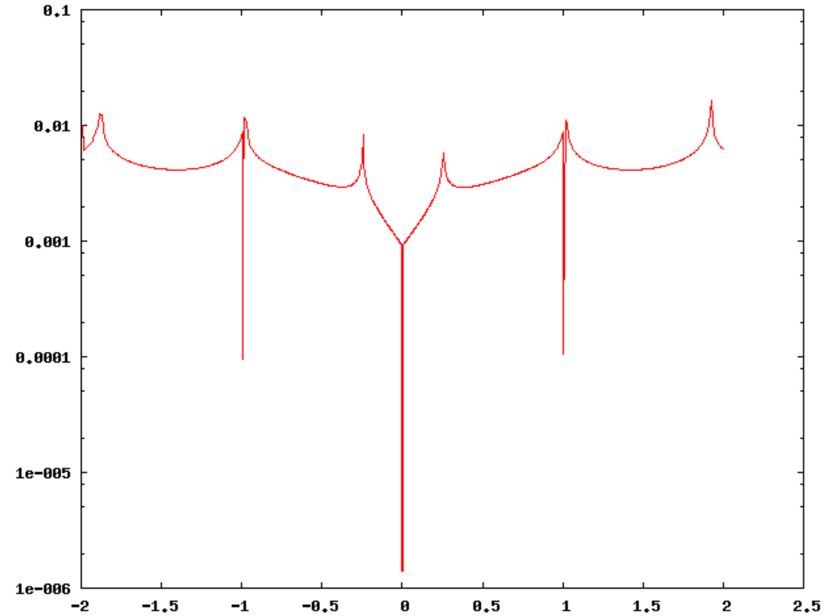
埋め込みRunge-Kutta

0					
1/3	1/3				
1/3	1/6	1/6			
1/2	1/8	0	3/8		
1	1/2	0	−3/2	2	
4th	1/6	0	0	2/3	1/6
3rd	1/10	0	3/10	2/5	1/5

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	−7200/2197	7296/2197			
1	439/216	−8	3680/513	−845/4104		
1/2	−8/27	2	−3544/2565	1859/4104	−11/40	
4th	25/216	9	1408/2565	2197.4104	−1/5	0
5th	16/135	0	6656/12825	28561/56430	−9/50	2/55

ヒント

- 係数に関するバグは非常に発生しやすい(分数がいっぱいなので)
  - しかも、それでも一応動いているように見えたりする
- そんなに計算時間はかからないはず
  - 正しいプログラムならば、という仮定の上で
- 丸め誤差などにも注意する



参考文献

- Solving Ordinary Differential Equations I -- Nonstiff Problems --
  - E.Hairer, S.P. Norsett, G.Wanner
  - Springer